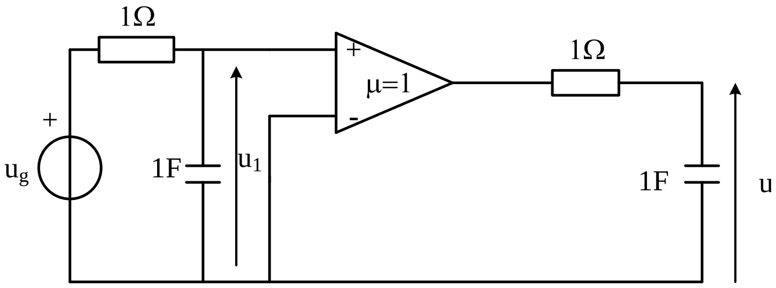
PRIMJENA FURIJEOVE TRANSFORMACIJE U KOLIMA

1. Za kolo prema šemi odrediti:

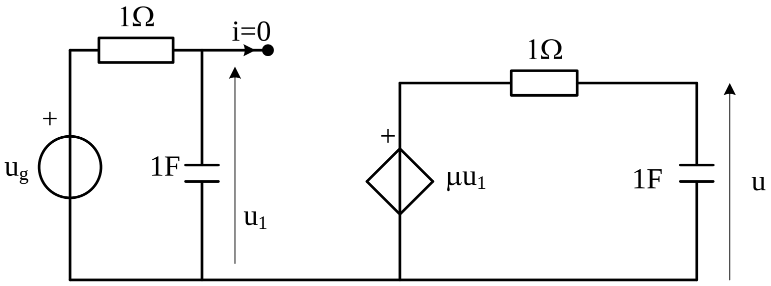
a) funkciju kola $W\left(j\omega\right)=\dfrac{U\left(j\omega\right)}{U_g\left(j\omega\right)}$

b) Ako je kolo bez početne energije i ako je:
$U_g\left(t\right)=e^{-2t}h\left(t\right)V$ odrediti u(t), t>0.



R

Ekvivalentna električna šema zadatom kolu je



a)
Napon U_1 je preko naponskog razdjelnika

$$\underline{U}_1=\frac{1}{j\omega C}\frac{\underline{U}_g}{1+\frac{1}{j\omega C}}=...=\frac{\underline{U}_g}{1+j\omega}$$

analogno, traženi napon je

$$\underline{U}=\frac{1}{j\omega C}\frac{\mu\underline{U}_1}{1+\frac{1}{j\omega C}}=...=\frac{\underline{U}_1}{1+j\omega}=\frac{\underline{U}_g}{\left(1+j\omega\right)^2}$$

sada je tražena prenosna funkcija

$$W\left(j\omega\right)=\frac{U\left(j\omega\right)}{U_g\left(j\omega\right)}=\frac{\frac{\underline{U}_g}{\left(1+j\omega\right)^2}}{\underline{U}_g}=\frac{1}{\left(1+j\omega\right)^2}$$

b) Na početku, potrebno je odrediti FT napona $\underline{U}_g$, a znajući tablični izraz

$$\mathcal{F}\left\{e^{-at}h\left(t\right)\right\}=\frac{1}{a+j\omega}$$

sada važi

$$\underline{U}_g=\frac{1}{2+j\omega}$$

tada je

$$\underline{U}=\frac{1}{2+j\omega}\frac{1}{\left(1+j\omega\right)^{2}}=\frac{A}{\left(1+j\omega\right)^{2}}+\frac{B}{\left(1+j\omega\right)}+\frac{C}{2+j\omega}$$

Tj.

$$\underline{U}=\frac{A\left(2+j\omega\right)+B\left(1+j\omega\right)\left(2+j\omega\right)+C\left(1+j\omega\right)^{2}}{\left(1+j\omega\right)^{2}\left(2+j\omega\right)}=\frac{\omega^{2}\left(-B-C\right)+j\omega\left(A+3B+2C\right)+\left(2A+2B+C\right)}{\left(1+j\omega\right)^{2}\left(2+j\omega\right)}$$

$$-B-C=0$$
$$A+3B+2C=0$$
$$2A+2B+C=1$$

dobija se

$A=1$ $\qquad B=-1$ $\qquad C=1$

$$\underline{U}=\frac{1}{2+j\omega}\frac{1}{\left(1+j\omega\right)^{2}}=\frac{1}{\left(1+j\omega\right)^{2}}-\frac{1}{\left(1+j\omega\right)}+\frac{1}{2+j\omega}$$

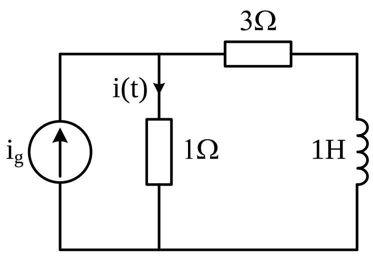
Prema tabličnim izrazima

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(a+j\omega\right)^{n}}\right\}=\frac{t^{n-1}e^{-at}}{\left(n-1\right)!}$$

slijedi

$$u\left(t\right)=\left(e^{-2t}-e^{-t}+te^{-t}\right)h\left(t\right)=\left[e^{t}\left(t-1\right)+e^{-2t}\right]h\left(t\right)$$

2. Primjenom FT odrediti struju i(t). Početna vrijednost struje i(t)=0, a struja izvora je $i_g(t)=10h(t)$. Skicirati i(t) u funkciji od t.



R

$$I_{g}\left(j\omega\right)=10\pi\delta\left(\omega\right)+\frac{10}{j\omega}$$

Iz strujnog razdjelnika vidi se:

$$I\left(j\omega\right)=\frac{3+j\omega}{4+j\omega}\left[10\pi\delta\left(\omega\right)+\frac{10}{j\omega}\right]=\frac{3+j\omega}{4+j\omega}10\pi\delta\left(\omega\right)+\frac{3+j\omega}{4+j\omega}\frac{10}{j\omega}$$

Sada je potrebno dobijeni izraz prevesti u vremenski domen. Ako se posmatraju odvojeno oba sabirka, prvi je

$$I_{1}\left(j\omega\right)=\frac{3+j\omega}{4+j\omega}10\pi\delta\left(\omega\right)\rightarrow i_{1}\left(t\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}10\pi\frac{3+j\omega}{4+j\omega}\delta\left(\omega\right)e^{-j\omega t}d\omega=10\pi\frac{3}{4}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega\right)d\omega=$$

$$=10\pi\frac{3}{4}\frac{1}{2\pi}=\frac{15}{4}$$

drugi sabirak

$$I_{2}\left(j\omega\right)=\frac{3+j\omega}{4+j\omega}\frac{10}{j\omega}=\frac{A}{j\omega}+\frac{B}{4+j\omega}=\frac{j\omega\left(A+B\right)+4A}{j\omega\left(4+j\omega\right)}$$

$$4A=30$$
$$A+B=10$$

slijedi $A=7.5$ $\qquad B=2.5$

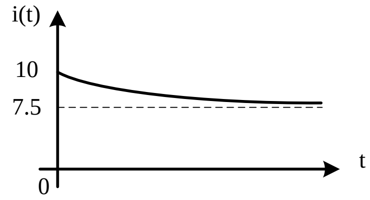
sada je

$$I_2(j\omega)=\frac{7.5}{j\omega}+\frac{2.5}{4+j\omega}\to i_2(t)=\frac{7.5}{2}\operatorname{sgn}(t)+2.5e^{-4t}h(t)=3.75\operatorname{sgn}(t)+2.5e^{-4t}h(t)$$

Dakle, tražena struja ima vremenski oblik:

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)=3.75+3.75\operatorname{sgn}(t)+2.5e^{-4t}h(t)=\left(3.75+3.75\operatorname{sgn}(t)+2.5e^{-4t}\right)h(t)$$

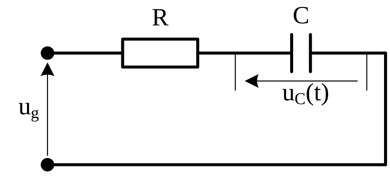
$$\operatorname{sgn}(t)h(t)=1\cdot h(t)\to i(t)=\left(7.5+2.5e^{-4t}\right)h(t)\ [\mathrm{A}]$$



3. U prostom, rednom RC kolu djeluje generator napona $u_g(t)=U_m e^{-at}h(t)$, a>0. Parametri R i C su poznati. Pomoću Furijeove transformacije dokazati da napon kondenzatora ima oblik:

$$u_C(t)=\frac{U_m}{1-RCa}\left(e^{-at}-e^{-\frac{t}{RC}}\right)h(t)$$

<u>R</u>



$$U_C(j\omega)=\frac{1}{j\omega C}\frac{U_g(j\omega)}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega RC}U_g(j\omega)$$

$$U_g(j\omega)=\frac{U_m}{a+j\omega}\to U_C(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega RC}\frac{1}{a+j\omega}U_m$$

kako bi se prešlo u vremenski domen potrebno je razložiti izraz na pojedinačne razlomke

$$U_g(j\omega)=\frac{A}{1+j\omega RC}+\frac{B}{a+j\omega}$$

dobijaju koeficijenti se

$$A=\frac{RCU_m}{aCR-1}\qquad B=\frac{U_m}{1-aCR}$$

sada je konačna forma

$$U_g(j\omega)=\frac{RCU_m}{(aCR-1)}\frac{1}{(1+j\omega RC)}+\frac{U_m}{(1-aCR)}\frac{1}{(a+j\omega)}=\frac{RCU_m}{(aCR-1)}\frac{1}{RC\left(\frac{1}{RC}+j\omega\right)}+\frac{U_m}{(1-aCR)}\frac{1}{(a+j\omega)}$$

$$U_g(j\omega)=\frac{-U_m}{(1-aCR)}\frac{1}{\left(\frac{1}{RC}+j\omega\right)}+\frac{U_m}{(1-aCR)}\frac{1}{(a+j\omega)}$$

sada je vremenski oblik napona

$$u_C(t)=\left[\frac{-U_m}{1-aCR}e^{-\frac{1}{RC}t}+\frac{U_m}{1-aCR}e^{-at}\right]h(t)=\frac{U_m}{1-aRC}\left(e^{-at}-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)h(t)$$

4. Struja kroz otpornik R=40Ω je i(t)=20e^{-2t}h(t) A. Koji dio ukupne energije potrošnje u otporniku otpada na opseg $0 \le \omega \le 2\sqrt{3}\ rad/s$?

R

Relejeva teorema ili teorema energije je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2\, d\omega - Parservalova\ jedna\check{c}ina$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(j\omega)|^2\, d\omega$$

$$\int_{0}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(j\omega)|^2\, d\omega - f(t) = 0 \ \ za\ t<0$$

Energija potrošena u otporniku je

$$W_{40\Omega} = \int_0^{\infty} Ri^2(t)\,dt = 40\int_0^{\infty} 400e^{-4t}dt = \frac{16000}{-4} e^{-4t} /_0^{\infty} = 4000 \text{ J - ukupna energija}$$

Ako se radi pomoću FT

$$I(j\omega) = \mathcal{F}\{i(t)\} = \frac{20}{2+j\omega} \to |I(j\omega)| = \frac{20}{\sqrt{4+\omega^2}} \to |I(j\omega)|^2 = \frac{400}{4+\omega^2}$$

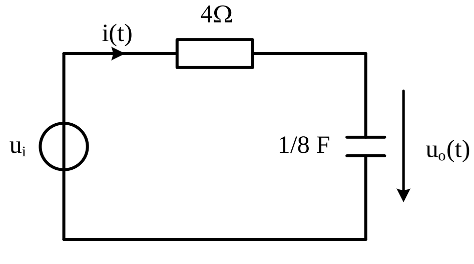
Sada je prema Parservalovoj jednačini

$$W_{40\Omega} = \frac{40}{\pi}\int_0^{\infty} |I(j\omega)|^2 d\omega = \frac{40}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{400}{4+\omega^2}d\omega = \frac{16000}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{d\omega}{4\left(1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right)} = \frac{16000}{\pi}\frac{1}{2}arctg\frac{\omega}{2}/_0^{\infty} = 4000\,\text{J}$$

Energija koja ide na opseg $0 \le \omega \le 2\sqrt{3}\ rad/s$ dobija se

$$W_{40\Omega} = \frac{40}{\pi}\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{400}{4+\omega^2}d\omega = ... = \frac{16000}{\pi}\frac{1}{2}arctg\frac{\omega}{2}/_0^{2\sqrt{3}} = \frac{8000}{\pi}\frac{\pi}{3} = \frac{8000}{3}\text{ J} \to \frac{\frac{8000}{3}}{4000} = 66.67\%$$

5. Za kolo prema slici, za u$_o$(0)=0, i ulazni napon u$_i$(t)=e^{-3t}h(t). Naći energiju kondenzatora.



R

Energija ulaznog signala je:

$$W_i = \int_{-\infty}^{\infty} u_i^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-3t}h(t)\right]^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-6t}dt = \frac{1}{6}$$

Furijeova transformacija ulaznog napona je prema tabličnim izrazima

$$U_i(j\omega) = \frac{1}{3+j\omega}$$

Ako se primjeni Parservalova jednačina

$$W_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|U_i(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{3+j\omega}\right|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{9+\omega^2}d\omega = \frac{1}{9\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{3}\right)^2}d\omega =$$

$$= \frac{1}{3\pi}arctg\frac{\omega}{3}/_0^{\infty} = \frac{1}{6}\text{ J}$$

Prenosna funkcija je odnos izlaznog i ulaznog signala (napona)

$$H(j\omega)=\frac{U_o(j\omega)}{U_i(j\omega)}=\frac{\frac{8}{j\omega}}{\left(4+\frac{8}{j\omega}\right)}=\frac{2}{2+j\omega}$$

Sada je traženi napon kondenzatora

$$U_o(j\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{4+\frac{1}{j\omega C}}U_i(j\omega)=\frac{2}{2+j\omega}U_i(j\omega)=H(j\omega)U_i(j\omega)$$

Energija kondenzatora prema Parservalovoj jednačini

$$W_i=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left|U_0(j\omega)\right|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left|H(j\omega)\right|^2\left|U_i(j\omega)\right|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left|\frac{2}{2+j\omega}\right|^2\left|\frac{1}{3+j\omega}\right|^2d\omega=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{d\omega}{\left(4+\omega^2\right)\left(9+\omega^2\right)}d\omega=\frac{4}{5\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{4+\omega^2}-\frac{1}{9+\omega^2}\right)d\omega=\frac{1}{15}\text{ J}$$

6. Napon na krajevima otpornika od 50Ω je v(t)=4te^{-t}h(t). Koliki procenat od ukupne energije pripada frekvencijskom opsegu $0\le\omega\le\sqrt{3}\ rad/s$?

R

Furijeova transformacija napona je prema tabličnim izrazima

$$V(j\omega)=\frac{4}{\left(1+j\omega\right)^2}$$

Prema Parservalovoj jednačini, ukupna energija za otpornik od 1Ω je:

$$W_i=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left|U(j\omega)\right|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left|\frac{4}{\left(1+j\omega\right)^2}\right|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{16}{\left(1+\omega^2\right)^2}d\omega=\frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega^2+1}+arctg\,\omega\right)\right]/_0^\infty=$$

$$=4\text{ J}$$

a energija za zadati opseg

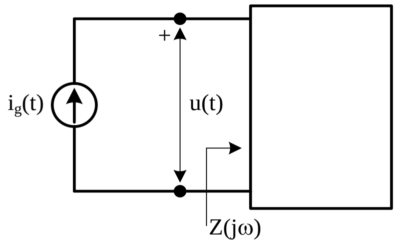
$$W_i=\frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left|U(j\omega)\right|^2d\omega=\frac{16}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{\omega^2+1}+arctg\,\omega\right)\right]/_0^{\sqrt{3}}=16\left[\frac{\sqrt{3}}{8\pi}+\frac{1}{6}\right]=3.769\text{ J}$$

Procenat je

$$3.769\frac{100}{4}=94.23\%$$

Dakle u posmatranom opsegu frekvencije prenosi se najveći dio energije. Iako su rezultati dobijeni za otpornik od 1Ω, procenat utrošene energije je isti i za otpornik od 50 Ω.

7. Za kolo sa slike poznato je $i(t)=I_g h(t)$ i $u(t)=\frac{I}{G}\left(1-e^{-\frac{G}{C}t}\right)h(t)$. Odrediti konfiguraciju kola.



R

Potrebno je odrediti ulaznu impedansu,

$Z(j\omega)=\dfrac{U(j\omega)}{I(j\omega)}$ gdje su

$$U(j\omega)=\mathcal{F}\left\{u(t)\right\}=\mathcal{F}\left\{\frac{I}{G}\left(1-e^{-\frac{G}{C}t}\right)h(t)\right\}=\mathcal{F}\left\{\frac{I}{G}h(t)\right\}-\mathcal{F}\left\{\frac{I}{G}e^{-\frac{G}{C}t}h(t)\right\}=\frac{I}{G}\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)-\frac{I}{G}\frac{1}{\frac{G}{C}+j\omega}$$

$$I(j\omega)=\mathcal{F}\left\{i_g(t)\right\}=\mathcal{F}\left\{Ih(t)\right\}=I\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)$$

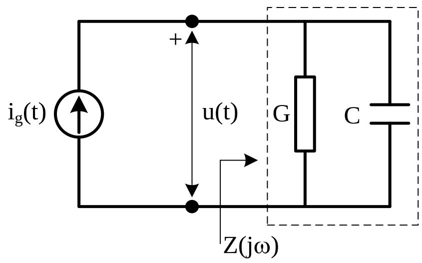
sada je impedansa (uzimajući u obzir $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$)

$$Z(j\omega)=\frac{U(j\omega)}{I(j\omega)}=\frac{\frac{I}{G}\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)-\frac{I}{G}\frac{1}{\frac{G}{C}+j\omega}}{I\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)}=\frac{1}{G}-\frac{1}{G}\frac{1}{\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)\left(\frac{G}{C}+j\omega\right)}=$$

$$=\frac{1}{G}\left[1-\frac{1}{\left(\pi\delta(\omega)\frac{G}{C}+\cancel{\pi\delta(\omega)j\omega}+\frac{G}{C}\frac{1}{j\omega}+1\right)}\right]=\frac{1}{G}\left[1-\frac{j\omega C}{\left(\cancel{\pi\delta(\omega)j\omega G}+G+j\omega C\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{G}\left[1-\frac{j\omega C}{(G+j\omega C)}\right]=\frac{1}{G}\frac{G+j\omega C-j\omega C}{G+j\omega C}=\frac{1}{G+j\omega C}$$

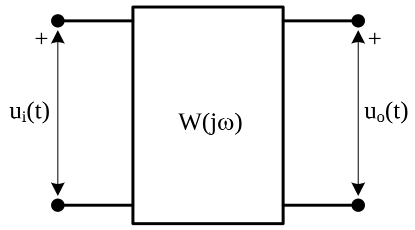
Dakle radi se o paralelnoj vezi provodnosti G i kondenzatora C, tj.



8. Moduo funkcije kola je

$$\left|W(j\omega)\right|=\begin{cases}1, & -\sqrt{3}<\omega<-1\\ 1, & 1<\omega<\sqrt{3}\\ 0, & ostalo\,\omega\end{cases}$$

ulazni signal je $u_i(t)=4e^{-t}h(t)$ naći energiju izlaznog signala W_o.



R

Ako se zna da važi

$$W(j\omega)=\frac{U_o(j\omega)}{U_i(j\omega)}$$

sada je

$$U_i(j\omega)=\mathcal{F}\left\{4e^{-t}h(t)\right\}=\frac{4}{1+j\omega}$$

traženi izlazni napon

$$U_o(j\omega)=W(j\omega)U_i(j\omega)$$

Prema Parservalovoj teoremi energija izlaznog signala je

$$W_o=\int_{-\infty}^{\infty}u_o^2(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|U_o(j\omega)\right|^2 d\omega$$

zna se da važi

$$\left|U_o(j\omega)\right|=\left|W(j\omega)\right|\left|U_i(j\omega)\right|$$

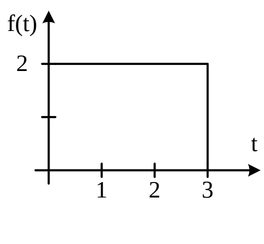
$$\left|U_i(j\omega)\right|=\frac{4}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

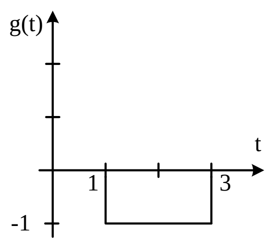
sada je

$$W_o=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|W(j\omega)\right|^2\left|U_i(j\omega)\right|^2 d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{3}}^{-1}1\frac{16}{1+\omega^2}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{1}^{\sqrt{3}}1\frac{16}{1+\omega^2}d\omega=$$

$$=\frac{8}{\pi}arctg\,\omega\Big/_{-\sqrt{3}}^{-1}+\frac{8}{\pi}arctg\,\omega\Big/_{1}^{\sqrt{3}}=\frac{8}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{8}{\pi}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{3}$$

1. Odrediti konvoluciju signala sa slike
a) grafički
b) rezultat provjeriti Laplasovom transformacijom





R

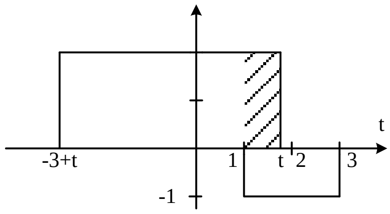
Prema definiciji konvolucija je

$$y(t)=f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

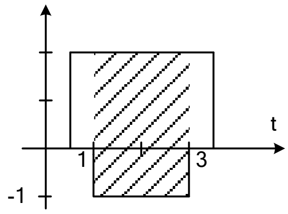
posmatraju se intervali gdje dolazi do preklapanja

$t<1\rightarrow y(t)=0$ jer nema preklapanja funkcija

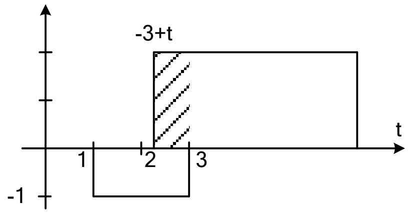
$$1<t<3\rightarrow y(t)=\int_1^t(-1)2d\tau=2(1-t)$$



$3 < t < 4 \rightarrow y(t) = \int_1^3 (-1)2d\tau = -4$



$4 < t < 6 \rightarrow y(t) = \int_{-3+t}^3 (-1)2d\tau = -2(6-t)$



$t > 6 \rightarrow y(t) = 0$ jer nema preklapanja

$$y(t) = \left\{ \begin{matrix} t<1, & 0 \\ 1<t<3, & 2(1-t) \\ 3<t<4, & -4 \\ 4<t<6, & -2(6-t) \\ t>6, & y(t)=0 \end{matrix} \right\}$$

b) Na početku, posmatrane funkcije su

$f(t) = 2\left[h(t) - h(t-3)\right]$

$g(t) = h(t-3) - h(t-1)$

Nakon Laplasove transformacije funkcija

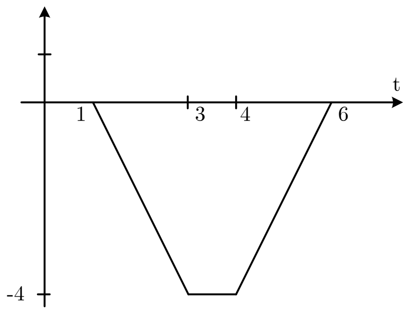
$F(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-3s}$ $\qquad$ $G(s) = \frac{1}{s}e^{-3s} - \frac{1}{s}e^{-s}$

sada je konvolucija u Laplasovom domenu

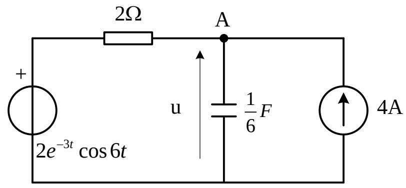
$$F(s)\cdot G(s) = \left(\frac{2}{s} - \frac{2}{s}e^{-3s}\right)\left(\frac{1}{s}e^{-3s} - \frac{1}{s}e^{-s}\right) = \frac{2}{s^2}e^{-3s} - \frac{2}{s^2}e^{-s} - \frac{2}{s^2}e^{-6s} + \frac{2}{s^2}e^{-4s}$$

sada je

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

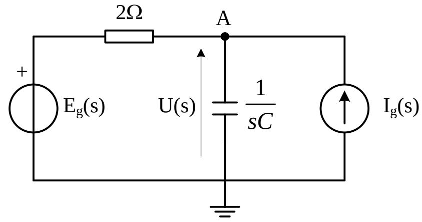


2.Naći u(t) za t>0 u kolu sa slike ako je u(0)=0.



R

Posmatrano kolo u s-domenu ima oblik



gdje su

$C=\frac{1}{6}$ $\quad E_g(s)=2\frac{s+3}{(s+3)^2+6^2}$ $\quad I_g(s)=\frac{4}{s}$ iz tablica.

Ako se primjeni metod potencijala čvorova na čvor A,

$$U_A\left(\frac{1}{2}+sC\right)=I_g(s)+\frac{E_g(s)}{2}\rightarrow U_A=\frac{I_g(s)+\frac{E_g(s)}{2}}{\frac{1}{2}+sC}=\frac{\frac{4}{s}+\frac{s+3}{(s+3)^2+6^2}}{\frac{1}{2}+sC}=\frac{24}{s(s+3)}+\frac{6}{(s+3)^2+6^2}=$$

$$=\frac{8}{s}-\frac{8}{s+3}+\frac{6}{(s+3)^2+6^2}$$

sada inverzna Laplasova transformacija daje

$u(t)=8-8e^{-3t}-e^{-3t}\sin 6t, \qquad t\geq 0$

3. Odrediti signal f(t) čija je Laplasova transformacija data izrazom

a) $F(s)=\frac{2(s+10)}{(s+1)(s+4)}$

b) $F(s)=\frac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)}$

c) $F(s)=\frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2}$

R

Kako bi se lakše uočili tablični izrazi, potrebno je prethodno razložiti posmatrani izraz na parcijalne razlomke:

$$F(s)=\frac{2(s+10)}{(s+1)(s+4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+4}$$

Koeficijenti se dobijaju na sljedeći način

$$A=(s+1)F(s)/_{s=-1}=\frac{2\cdot 9}{3}=6$$

$$B=(s+4)F(s)/_{s=-4}=\frac{2\cdot 6}{-3}=-4$$

sada se može pisati

$$F(s)=\frac{6}{s+1}-\frac{4}{s+4}$$

ovdje se prepoznaju tablični izraz

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}=\frac{1}{s+a}$$

pa je tražena funkcija

$$f(t)=6e^{-t}-4e^{-4t}$$

b) Ako se izraz transformiše

$$F(s)=\frac{s}{(s+1)\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{s}{(s+1)(s+1-j)(s+1+j)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+1-j)}+\frac{B^*}{(s+1+j)}$$

koeficijenti su

$$A=(s+1)F(s)/_{s=-1}=\frac{-1}{1}=-1$$

$$B=(s+1-j)F(s)/_{s=-1+j}=\frac{-1+j}{j(2j)}=\frac{1-j}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{/-45^\circ}$$

$$B^*=\frac{1+j}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{/45^\circ}$$

ili

$$F(s)=\frac{s}{(s+1)\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{Cs+D}{\left(s^2+2s+2\right)}=\frac{As^2+2As+2A+Cs^2+Cs+Ds+D}{(s+1)\left(s^2+2s+2\right)}=$$

$$=\frac{(A+C)s^2+(2A+C+D)s+(2A+D)}{(s+1)\left(s^2+2s+2\right)}$$

gdje je

$$A=(s+1)F(s)/_{s=-1}=-1$$

a koeficijenti C i D se dobijaju upoređivanjem osnovnog i transformisanog oblika izraza

$$A+C=0\rightarrow C=1$$

$$2A+D=0\rightarrow D=2$$

time je transformisani oblik izraza

$$F(s)=\frac{-1}{(s+1)}+\frac{s+2}{\left(s^2+2s+2\right)}=-\frac{1}{(s+1)}+\frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1}=-\frac{1}{(s+1)}+\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}+\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

ovim su dobijeni tablični oblici, pa je jednostavno odrediti inverznu Laplasovu transformaciju jer se zna

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\sin\omega t\right\}=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\qquad\qquad \mathcal{L}\left\{e^{-at}\cos\omega t\right\}=\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$$

pa je

$f(t) = -e^{-t} + e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t$

c) Potrebno je transformisati izraz

$$F(s) = \frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{(s+2)}$$

koeficijenti su

$$F(s) = \frac{10s^2+4}{s(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{(s+2)}$$

$$A = sF(s)/_{s=0} = 1$$

$$B = (s+1)F(s)/_{s=-1} = -14$$

$$C = (s+2)^2 F(s)/_{s=-2} = 22$$

$$D = \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2 F(s)\right]/_{s=-2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{10s^2+4}{s^2+s}\right)/_{s=-2} = 13$$

Tako za opšti slučaj važi

$$F(s) = \frac{k_n}{(s+p)^n} + \frac{k_{n-1}}{(s+p)^{n-1}} + \ldots + \frac{k_1}{s+p}$$

$$k_{n-m} = \frac{1}{m!}\frac{d^m}{ds^m}\left[(s+p)^n F(s)\right]/_{s=-p}$$

a za zadati problem dobija se

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{14}{s+1} + \frac{22}{(s+2)^2} + \frac{13}{(s+2)} \rightarrow f(t) = h(t) - 14e^{-t} + 22te^{-2t} + 13e^{-2t}$$

prema tabličnim izrazima

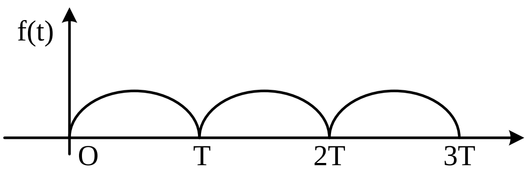
$$\mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}\left\{te^{-at}\right\} = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \mathcal{L}\left\{t^n e^{-at}\right\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

4. Time-shift ili time delay osobina tj. osobina vremenskog kašnjenja ima oblik

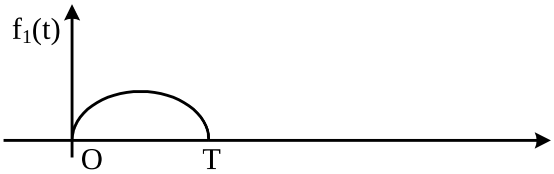
$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)h(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$$

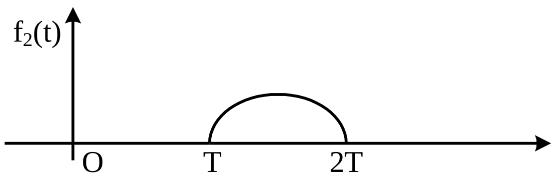
Ako se posmatra periodična funkcija kao na slici

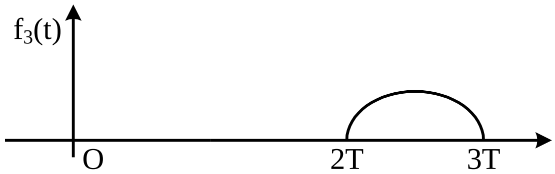


Ista funkcija može se predstaviti kao suma pomjerenih funkcija



$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T \\ 0, & inače \end{cases}$$





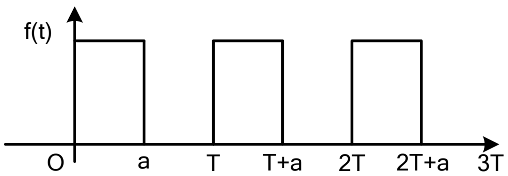
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \ldots =$$
$$= f_1(t) + f_1(t-T)h(t-T) + f_1(t-2T)h(t-2T) + \ldots$$

Ako se primjeni osobina vremenskog kašnjenja:

$$F(s) = F_1(s) + F_1(s)e^{-Ts} + F_1(s)e^{-2Ts} + F_1(s)e^{-3Ts} + \ldots = F_1(s)\left(1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + e^{-3Ts} + \ldots\right) =$$
$$= F_1(s)\frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

Zaključuje se da je Laplasova transformacija periodične funkcije jednaka Laplasovoj transformaciji prve periode funkcije podijeljene sa ($1-e^{-Ts}$).

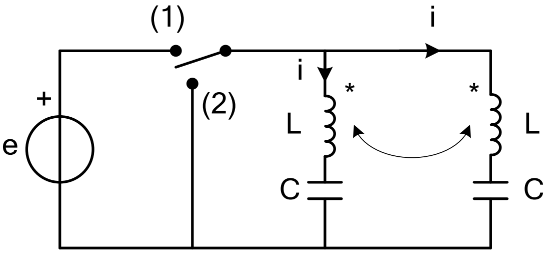
primjer: Ako je data periodična funkcija na slici. Odrediti njenu Laplasovu transformaciju



$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_{0-}^{a} e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\frac{1}{1-e^{-sT}}e^{-st}\Big/_{0-}^{a} = \frac{1-e^{-as}}{s\left(1-e^{-sT}\right)}$$

5. Za kolo prema slici poznato je L, C, k, e=E_o. Kolo je bez početne energije. Prekidač se prvobitno nalazi u položaju (1). U kojim se trenucima prekidač može prebaciti u položaj (2) pa da u kolu, koje je na ovaj način odvojeno od generatora ne bude struje.



R

Ako se posmatra prekidač u položaju (1)

$\mathcal{L}\left\{i\right\} = I(s)$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{L}\left\{e\right\} = \mathcal{L}\left\{E_o h(t)\right\} = \dfrac{E_o}{s}$

Za lijevu konturu može se pisati relacija

$$\frac{E_o}{s} = \left(sL + \frac{1}{sC} + skL\right)I(s) \rightarrow I(s) = \frac{\dfrac{E_o}{s}}{sL + \dfrac{1}{sC} + skL} = \ldots = \frac{CE_o}{1 + s^2LC(1+k)}$$

Potrebno je dobiti vremenski oblik struje, pa je neophodna transformacija dobijenog izraza prema nekom od tabličnih izaraza radi jednostavnijeg prelaza iz s-domena u vremenski domen, stoga

$$I(s)=\frac{CE_o}{1+s^2LC(1+k)}=\frac{CE_o}{LC(1+k)\left(\frac{1}{LC(1+k)}+s^2\right)}=\frac{E_o}{L(1+k)}\frac{1}{s^2+\left(\sqrt{\frac{1}{LC(1+k)}}\right)^2}$$

iz dobijenog izraza prepoznaje se

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC(1+k)}}$$

sada je

$$I(s)=\frac{E_o}{L(1+k)}\frac{1}{s^2+(\omega)^2}$$

a kako je tablični izraz oblika

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

tada se dobija

$$I(s)=\frac{E_o}{L(1+k)\omega}\frac{\omega}{s^2+(\omega)^2}$$

Sada je vremenski oblik struje

$$i(t)=\frac{E_o}{L(1+k)\omega}\sin\omega t=\frac{E_o}{L(1+k)\sqrt{\frac{1}{LC(1+k)}}}\sin\sqrt{\frac{1}{LC(1+k)}}t$$

napon na kalemu je:

$$u_L(t)=L\frac{di}{dt}+kL\frac{di}{dt}=(1+k)L\frac{di}{dt}=(1+k)L\frac{E_o}{L(1+k)\omega}\omega\cos\omega t=E_o\cos\omega t$$

napon kondenzatora je

$$u_C(t)=E_o-E_o\cos\omega t=E_o(1-\cos\omega t)$$

Kada se prekidač prebaci u položaj (2), kolo je u slobodnom režimu. Struje neće biti u kolu ako se prekidač prebaci u trenutku kada su struja kalema i napon kondenzatora jednaki nuli.

$$i_L(t)=i(t)=0\rightarrow\sin\omega t=0$$

$$u_C(t)=0\rightarrow 1-\cos\omega t=0$$

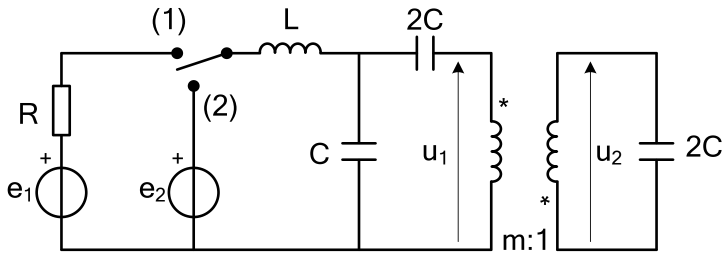
dobija se

$$\left.\begin{matrix}\sin\omega t=0\\ \cos\omega t=1\end{matrix}\right\}\rightarrow\omega t=2n\pi,\ \ n=1,2,3...$$

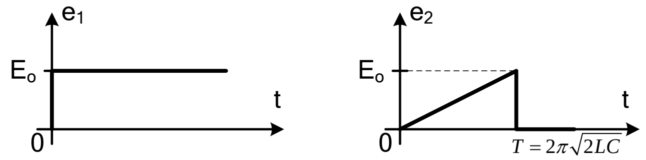
$$t=\frac{2n\pi}{\omega}=2n\pi\sqrt{(1+k)LC}$$

Dakle, ukoliko se prekidač prebaci u definisanom trenutku t, neće biti struje u kolu koje je odvojeno od izvora.

6. Zadato je kolo sa idealnim transformatorom poznatih parametara L, C i m=1.



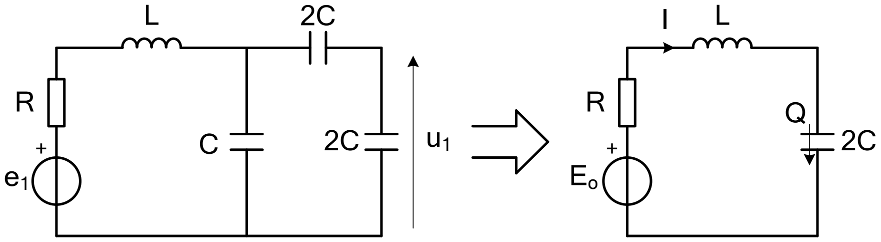
Kolo je bez početne energije. Elektromotorne sile određene su dijagramima prema slici



Prekidač se prvo dovodi u položaj (1). Pošto se u kolu uspostavi stacionarni režim, prekidač se prebacuje u položaj (2). Odrediti stuju kalema i napon u_2 kondenzatora u prelaznom režimu koji nastaje poslije dovođenja prekidača u položaj (2). Riješenja dati za $0 < t \leq T \;\; i \;\; t > T$.

R

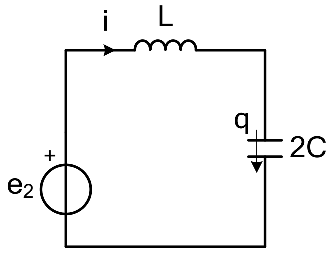
Prekidač je u položaju (1). Pošto kondenzator kojim su zatvoreni krajevi sekundara idealnog transformatora nema početno opterećenje, kolo se može ekvivalentirati tako što se posmatrani kondenzator svede na primar tj. zamjeni kondenzatorom koji je priključen na primar sa kapacitetom $2C/m^2=2C$, pa je šema



Kada ne bi bilo prigušenja oscilacije bi se održavale beskonačno dugo u kolu. Međutim, prigušenje je neizbježno i kolo dolazi u stacionarni režim poslije određenog vremena, a tada kalem predstavlja kratak spoj a kondenzator prekid u kolu, pa važi

$I = 0 \qquad\qquad Q = 2CE_o$

Za prekidač u položaju (2) šema kola je



gdje su početni uslovi

$i(0) = 0 \qquad\qquad q(0) = Q = 2CE_o$

Zadata ems e_2 se može napisati kao

$$e_2(t) = \frac{E_o}{T} t\left[h(t) - h(t-T)\right] = \frac{E_o}{T} th(t) - \frac{E_o}{T}(t - T + T)h(t-T) =$$

$$= \frac{E_o}{T} th(t) - \frac{E_o}{T}(t-T)h(t-T) - E_o h(t-T)$$

sada je Laplasova transformacija

$$E_2(s) = \mathcal{L}\{e_2(t)\} = \frac{E_o}{Ts^2} - \frac{E_o}{Ts^2}e^{-sT} - \frac{E_o}{s}e^{-sT}$$

Ako se napiše jednačina prema konturnim strujama

$$\left(sL + \frac{1}{c2C}\right)I(s) = E_2(s) + F(s)$$

gdje je u opštem slučaju

$$F_k(s) = \sum_{po\,konturi}\left(\pm Li(0) \mp \frac{q(0)}{sC}\right)$$ - opšti izraz koji uzima u obzir početne uslove

za posmatrano kolo

$$F(s) = -\frac{q(0)}{s2C} = -\frac{Q}{s2C}$$

sada je jednačina

$$\left(2LCs^2 + 1\right)I(s) = 2CsE_2(s) - Q$$

$$I(s) = \frac{2CsE_2(s)}{2LC\left(s^2 + \frac{1}{2LC}\right)} - \frac{Q}{2LC\left(s^2 + \frac{1}{2LC}\right)}$$

ako se definiše

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$$

važi

$$I(s) = \frac{sE_2(s)}{L\left(s^2 + \omega^2\right)} - \frac{Q\omega^2}{2LC\left(s^2 + \omega^2\right)}$$

ako se zamjeni ems

$$I(s) = \frac{E_o}{LT}\frac{1}{s\left(s^2 + \omega^2\right)} - \frac{E_o}{LT}\frac{1}{s\left(s^2 + \omega^2\right)}e^{-sT} - \frac{E_o}{L}\frac{1}{s^2 + \omega^2}e^{-sT} - \frac{Q\omega^2}{s^2 + \omega^2} = I^{'}(s) + I^{''}(s) + I^{'''}(s) + I^{iv}(s)$$

Sada je potrebno naći vremenski oblik pojedinih funkcija

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{I^{'}(s)\right\} = \frac{E_o}{LT\omega^2}\left[1 - \cos\omega t\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{I^{''}(s)\right\} = \frac{E_o}{LT\omega^2}\left[1 - \cos\omega(t - T)\right]h(t - T) = \frac{E_o}{LT\omega^2}\left[1 - \cos\omega t\right]h(t - T)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{I^{'''}(s)\right\} = \frac{E}{L\omega}\sin\omega t\, h(t - T)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{I^{iv}(s)\right\} = Q\omega\sin\omega t$$

pa je tražena struja

$$i(t) = \frac{E_o}{LT\omega^2}(1 - \cos\omega t)\left[1 - h(t - T)\right] - \left[Q\omega + \frac{E}{L\omega}h(t - T)\right]\sin\omega t$$

u intervalu $0 \le t < T \rightarrow h(t - T) = 0 \rightarrow i(t) = \dfrac{E_o}{LT\omega^2}(1 - \cos\omega t) - Q\omega\sin\omega t$

$$\omega Q = \frac{2CE_o}{\sqrt{2LC}} = 2E_o\sqrt{\frac{C}{2L}}$$

$$\frac{E_o}{LT\omega^2} = \frac{E_o}{L\frac{2\pi}{\omega}\omega^2} = \frac{E_o}{2\pi}\sqrt{\frac{2LC}{L}} = \frac{E_o}{2\pi}\sqrt{2C}$$

$$i(t) = E_o\sqrt{\frac{2C}{L}}\left[\frac{1}{2\pi}(1-\cos\omega t) - \sin\omega t\right], \qquad 0 \le t < T$$

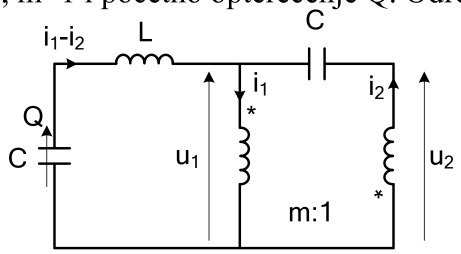
U slučaju $t \ge T \rightarrow h(t-T) = 1$

$$i(t) = -\left(Q\omega + \frac{E_o}{L\omega}\right)\sin\omega t = -\left(\frac{2CE_o}{\sqrt{2LC}} + \frac{E_o\sqrt{2LC}}{L}\right)\sin\omega t = -E_o\left[\sqrt{\frac{4C^2}{2LC}} + \sqrt{\frac{2LC}{L^2}}\right]\sin\omega t$$

slijedi

$$i(t) = -2E_o\sqrt{\frac{2C}{L}}\sin\omega t, \qquad t \ge T$$

7. Za kolo sa slike zadato je L,C, m=1 i početno opterećenje Q. Odrediti u_1.



R

Za idealni transformator sa slike može se napisati

$$\frac{U_1(s)}{U_2(s)} = -m \qquad \frac{I_1(s)}{I_2(s)} = -\frac{1}{m}$$

Ako se napiše relacija prema KZN za lijevu konturu

$$U_1(s) + \left(Ls + \frac{1}{Cs}\right)\left(I_1(s) - I_2(s)\right) + \underbrace{\frac{1}{Cs}\left|\int(i_1 - i_2)\,dt\right|_{t=0}}_{Q} = 0$$

Struja kroz desni kondenzator se može napisati kao

$$I_2(s) = Cs\left(U_2(s) - U_1(s)\right)$$

sa šeme je poznato

$$U_1(s) = -mU_2(s) \rightarrow U_2(s) - U_1(s) = -\frac{1+m}{m}U_1(s)$$

$$I_1(s) = -\frac{I_2(s)}{m} \rightarrow I_1(s) - I_2(s) = -\frac{1+m}{m}I_2(s)$$

dobija se

$$U_1(s) - \frac{1+m}{m}\left(\frac{Ls^2C+1}{Cs}\right)I_2(s) = -\frac{Q}{Cs}$$

$$-\frac{1+m}{m}CsU_1(s) = I_2(s)$$

slijedi

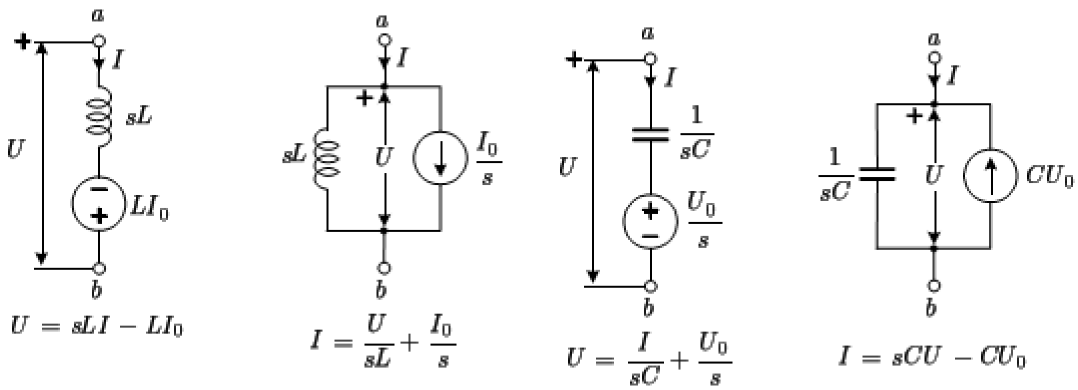
$$U_1(s)+\left(\frac{1+m}{m}\right)^2\left(Ls^2C+1\right)U_1(s)=-\frac{Q}{Cs}$$

ako se uvedu smjene

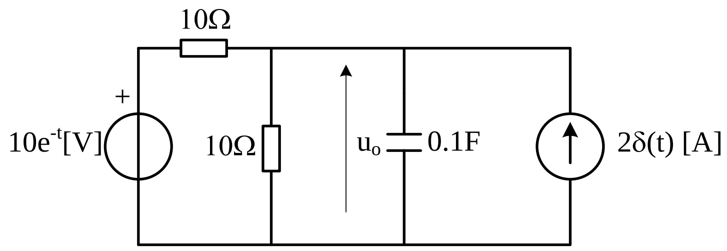
$$\frac{1+m}{m}=\alpha \qquad \omega=\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2 LC}}$$

$$U_1=-\frac{Q}{\left(1+\alpha^2\right)C}\left(1-\cos\omega t\right)$$

Primjena Laplasove transformacije u kolima sa početnim uslovima različitim od 0.

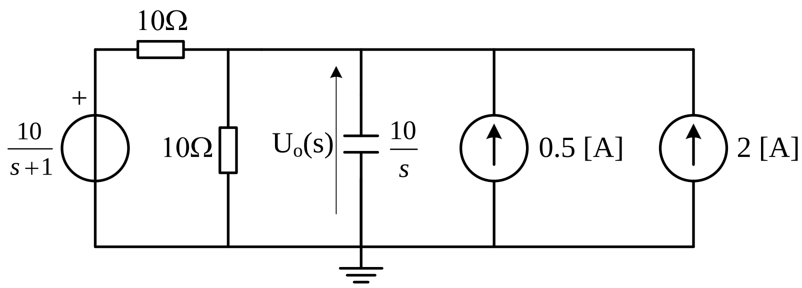


8. Naći $u_C(t)$ u kolu sa slike. Pretpostaviti da je $u_C(0)=5V$



R

Ako se kolo prevede u s-domen



Ako se primjeni metod potencijala čvorova

$$U_o(s)\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{s}{10}\right)=0.5+2+\frac{10}{(s+1)10}$$

dolazi se do

$$U_o(s)=\frac{25s+35}{(s+1)(s+2)}$$

potrebno je transformisati izraz

$$U_o = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = (s+1)U_o(s)/_{s=-1} = 10$$

$$B = (s+2)U_o(s)/_{s=-2} = 15$$

$$U_o = \frac{10}{s+1} + \frac{15}{s+2} \rightarrow u_o(t) = \left(10e^{-t} + 15e^{-2t}\right)h(t)$$